සංයුක්ත ගණිතය

≈ සරල රේඛාව ≈

Manoj Solangaarachchi
(B. Sc.)

---

(01) $ax + by + c = 0$,
$ax + by + d = 0$,
$a'x + b'y + c' = 0$,
$a'x + b'y + d' = 0$, යන සරල රේඛාවලින් සෑදි සමාන්තරාස්‍රයේ විකර්ණයන්හි සමීකරණ සොයන්න.

(i) $(a^2 + b^2)(c' - d')^2 = (a'^2 + b'^2)(c - d)^2$ නම්, සමාන්තරාස්‍රය රොම්බසයක් වන බව ද,

(ii) සමාන්තරාස්‍රයෙහි වර්ගඵලය $\left|\dfrac{(c - d)(c' - d')}{ab' - a'b}\right|$ වන බව ද, පෙන්වන්න.

---

(02) N ලක්ෂ්‍යය වූ කලී $P_0(x_0, y_0)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට $ax + by + c = 0$ සරල රේඛාවක අඳිනු ලබන ලම්බකයේ අඩියයි. N හි ඛණ්ඩාංක, $t = -\dfrac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}$ වූ $(x_0 + at, y_0 + bt)$ බව සාධනය කරන්න.

T යනු පරාමිතිය විට සරල රේඛාවක සමීකරණය, $l^2 + m^2 = 1$ වන $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = T$ පරාමිතික ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරනු ලැබුවහොත් $|T|$ යනු $P_1(x_1, y_1)$ අචල ලක්ෂ්‍යයේ සිට $P(x_1 + lT, y_1 + mT)$ ලක්ෂ්‍යයට දුර බව පෙන්වන්න.

$4\sqrt{5}$ දිගෙන් යුත් එක් විකර්ණයක් $x - 2y + 5 = 0$ සරල රේඛාව දිගේ පිහිටි රොම්බසයක ශීර්ෂයක් $A(2, 1)$ වෙයි. රොම්බසයේ සෙසු ශීර්ෂ සොයන්න.

---

(03) (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යයේ සිට $ax + by + c = 0$ රේඛාවට ඇඳි ලම්බයේ දිග $\dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ බව පෙන්වන්න.

(i) සමාන්තර රේඛා දෙකකින් එක එකක් x–අක්ෂයේ ධන දිශාව සමඟ α කෝණයක් සාදයි. එක් රේඛාවක් (h, k) හරහාද, අනෙක් (m, n) හරහාද යයි. රේඛා අතර ලම්බ දුර $|(h - m)\sin\alpha - (k - n)\cos\alpha|$ බව පෙන්වන්න.

(ii) වර්ග ඒකක 13 වර්ගඵලය යුත් සමචතුරස්‍රයක කේන්ද්‍රය $(-½, 1)$ ය. එහි පාද දෙකක් $12x + 5y = 0$ රේඛාවට සමාන්තරය. සමචතුරස්‍රයේ පාද හතරේ සමීකරණය සොයන්න.

(04) (x_0, y_0) යනු $ax + by + c = 0$ සරල රේඛාව මත ලක්ෂ්‍යයක් නම්, t යනු පරාමිතියක් විට, රේඛාව මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයෙක බණ්ඩාංක $(x_0 + bt, y_0 - at)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව සාධනය කරන්න.
$3x + 4y - 24 = 0$ රේඛාව මත P ලක්ෂ්‍යය පිහිටියේ මූල ලක්ෂ්‍යයේ සිට එයට ඇති දුරෙහි විශාලත්වය P ත් $A(3, 1), B(-1, 3)$ ලක්ෂ්‍යයත් මගින් සෑදි ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලයේ විශාලත්වයට සමාන වන පරිදිය. P සඳහා පිහිටීම් දෙකක් පවත්නා බවද එම පිහිටීම් දෙකෙන් එකක්, P_0 යැයි කියුම සඳහා P_0AB සෘජු කෝණයක් බව ද සාධනය කරන්න. P_0ABQ සෘජුකෝණාස්‍රයක් වන පරිදි සිව් වැනි ශීර්ෂය වූ Q හි බණ්ඩාංක සොයන්න.

---

(05) $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2)$ ලක්ෂ්‍යය කරන රේඛාව අභ්‍යන්තර යෙන්ද, බාහිරයෙන්ද $m_1 : m_2$ අනුපාතයට බෙදාලන ලක්ෂ්‍ය වල බණ්ඩාංක පිළිවෙලින්,

$$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right) \text{ ද } \left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{\mathrm{m}_1 - \mathrm{m}_2}\right)$$ බව සාධනය කරන්න.

X හා Y ලක්ෂ්‍යය මගින් $A(-2, 6), B(1, -6)$ ලක්ෂ්‍යය යා කරන රේඛාව පිළිවෙලින් අභ්‍යන්තරයෙන් ද, බාහිරයෙන්ද $2 : 1$ අනුපාතයට බෙදේ. P යනු $\angle XPY$ සෘජු කෝණයක් වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යයකි. $\Delta\ PAB$ හි වර්ගඵලය ඒකක 24 ක් වෙයි. P සඳහා P_1, P_2, P_3, P_4 පිහිටීම් 4 අතුරෙන් දෙකටය. (P_1, P_2 කියමු.) නිබිල බණ්ඩාංක ඇති බව සාධනය කරන්න. AP_1B, AP_2B කෝණවල සමච්ඡේදන වල සමීකරණය සොයන්න.

---

(06) $t = -\dfrac{2\,(ax_0 + by_0 + c)}{a^2 + b^2}$ වන $(x_0 + at, y_0 + bt)$ ලක්ෂ්‍යය $ax + by + c = 0$ රේඛාව මත (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යයේ ප්‍රතිබිම්බය බව සාධනය කරන්න. $l_2 : 3x - 4y + 5$ රේඛාව මත $l_1 : 2x - y + 5 = 0$ රේඛාවේ ප්‍රතිබිම්බය සොයන්න.
ක්ෂේත්‍රඵලය වර්ග ඒකක 25 වන රොම්බසයක්, එහි යාබද පාද දෙකක් l_1 හා l_2 ඔස්සේ පිහිටන අයුරින් ඇඳ ඇත. මේ ආකාරයට ඇඳිය හැකි රොම්බස හතරක් ඇති බව පෙන්වන්න.
l_2 විකර්ණයක් ලෙස ඇති රොම්බසවල පාදයන්ගේ සමීකරණ සොයන්න.

---

(07) $lx + my + n = 0$ රේඛාවට (x_1, y_1) ලක්ෂ්‍යයේ සිට අඳන ලද ලම්බයේ අඩියෙහි බණ්ඩාංක සොයන්න.
$OAPB$ යනු O මූල ලක්ෂ්‍යයද, $A \equiv (\lambda a + \lambda b)$ ද, $B \equiv (\mu b - \mu a)$ ද වන සෘජුකෝණාස්‍රයකි. මෙහි $a^2 + b^2 = 1$ වෙයි.
$\lambda^3 + \mu^3 = C\,(\lambda^2 + \mu^2)$ වන පරිදි A හා B විචලනය වේ නම් P සිට AB ට ඇඳි ලම්බයේ අඩියෙහි පථය සරල රේඛාවක් බව සාධනය කරන්න. මෙහි C නියතයකි.

---

(08) $ax + by + c = 0$ යනු l නම්, රේඛාවක සමීකරණය වන අතර, $P_1 \equiv (x_1, y_1), P_2 \equiv (x_2, y_2)$ යනු l මත නොපිහිටි ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යය දෙකකි. l මගින් P_1P_2 බෙදනු ලබන අනුපාතය සොයන්න. P_1 සහ P_2 ලක්ෂ්‍යය l රේඛාව දෙපස පිහිටීම සඳහා අවශ්‍යතාව අපෝහනය කරන්න.
$A \equiv (-1, -1), C \equiv (7, 15)$ යනු $ABCD$ සමාන්තරාස්‍රයක ප්‍රතිවිරුද්ධ ශීර්ෂ දෙකකි. එයට
x – අක්ෂයේ ධන දිශාව සමග $\tan^{-1}(4)$ කෝණයක් සාදනු ලබන $2\sqrt{17}$ දිගින් යුත්

විකර්ණයක් ඇත. B සහ D ශීර්ෂයන්ගේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. සමාන්තරාස්‍රයේ ABC සහ ADC කෝණවල අභ්‍යන්තර කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ ද සොයන්න.

---

(09) (x_1, y_1) ලක්ෂ්‍යයේ සිට $ax + by + c = 0$ සරල රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර $\dfrac{|(ax_1 + by_1 + c)|}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ බව පෙන්වන්න.

$A \equiv (2, 5), B \equiv (11, 2)$ සහ $C = (8, 7)$ ශීර්ෂ වන $ABC\,\Delta$ යේ පිළිවෙලින් එක එකක් AB හා AC පාදවල සිට $\dfrac{4}{\sqrt{10}}$ සහ $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ දුර වලින් පිහිටන ලක්ෂ්‍යය හතර සොයන්න.

(i) මෙම ලක්ෂ්‍යවලින් කවර ලක්ෂ්‍යය ත්‍රිකෝණය ඇතුළත පිහිටන්නේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

(ii) මෙම ලක්ෂ්‍යය හතර මගින් සාදනු ලබන සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

---

(10) $ax + by + c = 0$ රේඛාව $P_1\,(x_1, y_1)$ සහ $P_2\,(x_2, y_2)$ ලක්‍ෂ්‍ය යා කරන රේඛාව $-\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c}$ අනුපාතයට බෙදන බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක BC, CA, AB පාද පිළිවෙලින් $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$ සරල රේඛා ඔස්සේ පිහිටනු ලැබේ. මෙහි $u_r \equiv a_r x + b_r y + c_r$, $r = 1, 2, 3$ වේ. k නියතයක් වන $u_3 - ku_2 = 0$ රේඛාව A හරහා යන බව ද, $\dfrac{k\,(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_3b_1 - a_1b_3}$ අනුපාතයට BC බෙදන බව ද පෙන්වන්න.

$(a_2a_3 + b_2b_3)(a_1b_2 - a_2b_1)(a_3b_1 - a_1b_3)$ ධන වීම හෝ සෘණ වීම හෝ අනුව ත්‍රිකෝණයේ A කෝණය මහා කේණයක් හෝ සුළු කෝණයක් හෝ වන බව පෙන්වන්න.

---

(11) $ax + by + c = 0$ සරල රේඛාව $u_i = 0, (i = 1, 2)$ සමාන්තර නොවන සරල රේඛා දෙක පිළිවෙලින් A සහ B හිදී ඡේදනය කරයි. මෙහි $u_i \equiv a_i x + b_i y + c_i$ වේ. Z යනු $AZ = k\,ZL$ වන සේ AB මත පිහිටි ලක්‍ෂයයකි.

$u_1 = 0$ සහ $u_2 = 0$ හි ඡේදන ලක්‍ෂ්‍යයට Z යා කරන රේඛාව $u_1 + \dfrac{k\,(a_1b - ab_1)}{a_2b - ab_2}\,u_2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක BC, CA, AB පාද පිළිවෙලින් $x - 4y + 6 = 0, 2x - y - 6 = 0, x - y + 3 = 0$ රේඛා ඔස්සේ වේ. X යනු $2\,BX = XC$ වන සේ BC මත පිහිටි ලක්‍ෂ්‍යයක් ද Y යනු $2AY = 3YC$ වන සේ AC මත පිහිටි ලක්‍ෂ්‍යයක් ද වේ.

AX සහ BY හි ඡේදන ලක්‍ෂ්‍යයට C යා කරන රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

---

(12) $y = m_1x + c_1, y = m_2x + c_2$ සහ $x = 0$ රේඛාවලින් සෑදුන ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $\dfrac{(c_1 - c_2)^2}{2\,|\,m_1 - m_2\,|}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $y = 2x + 3, y = -2x + 7$ සහ $y = 6x + 2$ රේඛාවලින් සෑදුන ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

---

(13) $ax + by + c = 0$ මත (x, y) ලක්ෂ්‍යයේ ප්‍රතිබිම්බය සොයන්න.

$ABCD$ යනු $B \equiv (1, 0)$ සහ AB, AC හි සමීකරණ පිළිවෙලින් $y - x + 1 = 0$ සහ $y - 3x = 0$

වනසේ වූ රොම්බසයකි. DA, CD සහ BC රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න.
තවද $ABCD$ රොම්බසයේ වර්ගඵලය ද සොයන්න.

---

(14) P ලක්ෂ්‍යයක දී ඡේදනය වන l_1 හා l_2 සරල රේඛා පිළිවෙලින් $ax + by + c = 0$ සහ $a'x + b'y + c' = 0$ සමීකරණවලින් නිරූපණය වේ. λ යනු පරාමිතියක් විට, $ax + by + c + \lambda(a'x + b'y + c') = 0$ සමීකරණය විවරණය කරන්න.
l_1, l_2 ට සමාන්තරව O මූල ලක්ෂ්‍යය හරහා වූ සරල රේඛා පිළිවෙලින් Q හා R හිදි l_2 හා l_1 ඡේදනය කරයි. $OQPR$ සමාන්තරාස්‍රයේ OP, QR විකර්ණවල සමීකරණ සොයන්න. $(c, c' \neq 0)$
ඒ නයින්,

(i) $OQPR$ රොම්බසයක් වීම සඳහාත්

(ii) $OQPR$ සමචතුරස්‍රයක් වීම සඳහාත්

a, b, c, a', b', c' මගින් සපුරාලිය යුතු අවශ්‍යයතා නිර්ණය කරන්න.

---

(15) $lx + my + n = 0$ සරල රේඛාව මත $P \equiv (\alpha, \beta)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි ප්‍රතිබිම්බයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න. ABC ත්‍රිකෝණයක A, B, C ශීර්ෂ පිහිටා ඇත්තේ පිළිවෙලින් $y = x, y = 2x, y = 3x$ රේඛා මතය. AB හි ලම්භ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය $3y + x - 18 = 0$ වේ. BC රේඛාව $y + x = 0$ සරල රේඛාවට සමාන්තරය. ABC ත්‍රිකෝණයේ පාද වල සමීකරණ ලබා ගන්න.

---

(16) $y = ax + b$ සරල රේඛාව, $y = mx$ සහ $y = m'x$ රේඛා පිළිවෙලින් A සහ B හිදී ඡේදනය කරනු ලැබේ. මෙහි a සහ $b\,(\neq 0)$ නියත වේ. C ලක්ෂ්‍යය, $OACB$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වේ. O යනු මූල ලක්ෂ්‍යයයි.

(i) C හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

(ii) $OACB$ රොම්බසයක් නම්, $(a^2 - 1)(m + m') + 2a\,(1 - mm') = 0$ බව පෙන්වන්න.

(iii) $OACB$ සමචතුරස්‍රයක් නම්, එහි වර්ගඵලය $\dfrac{2b^2}{1 + a^2}$ බව පෙන්වන්න.

---

(17) $l_1 \equiv ax + by + c = 0$ සහ $l_2 \equiv a'x + b'y + c' = 0$ රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන ඕනෑම සරල රේඛාවක සමීකරණය $ax + by + c + \lambda(a'x + b'y + c') = 0$ ලෙස ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි λ යනු නියතයකි. $l_3 \equiv lx + my + n = 0$ විචල්‍ය රේඛාව l_1 සහ l_2 රේඛා පිළිවෙලින් A හිදී හා B හිදී ඡේදනය කරයි. c, c' දෙකම නිශ්ශුන්‍ය වන අතර ඛණ්ඩාංක මූලය O ය. OA රේඛාව OB ට ලම්බ නම්,
$(aa' + bb')\,n^2 - (ac' + ca')\,ln - (bc' + cb')\,mn + (l^2 + m^2)\,cc' = 0$ බව පෙන්වන්න.

P යනු O සිට $lx + my + n = 0$ රේඛාවට ඇඳි ලම්බයේ අඩියයි. ඉහත දැක්වෙන අවශ්‍යයතා සපුරාලයි නම්, l_3 රේඛාව විචලනය වත්ම P හි පථය, වෘත්තයක් බව පෙන්වන්න.
l_1 හා l_2 රේඛා එකිනෙකට ලම්බ නම්, එම පථය කුමක් වෙයිද?

---

(18) $ax + by + c = 0$ රේඛාවෙහි $P\,(\alpha, \beta)$ ලක්ෂ්‍යයේ ප්‍රතිහිම්බය සොයන්න.
ඒ නයින්, $ax + by + c = 0$ හි, $lx + my + n = 0$ රේඛාවේ ප්‍රතිහිම්බය සොයන්න.
රොම්බසයක විකර්ණයක් $2x + y - 1 = 0$ රේඛාව වේ. එක් ශීර්ෂයක් $(2, -3)$ වන අතර එහි එක් පාදයක් $y - x - 4 = 0$ රේඛාව මත පිහිටයි. ඉතිරි පාද තුනෙහිත්, ඉතිරි විකර්ණයේත්

සමීකරණ සොයන්න.

---

(19) (x_0, y_0) හරහා යන්නා වූද බෑවුම m වූද සරල රේඛාව මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(x_0 + t, y_0 + mt)$ ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි t යනු පරාමිතියකි. P වනාහි, $AP : PC = 1 : \lambda^2$ වන පරිදි $A\,(1, 0)$ සහ $C\,(4, 4)$ ලක්ෂ්‍ය යා කෙරෙන රේඛාව මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකි. මෙහි $\lambda > 0$. P හරහා AC ට ලම්බ වූ රේඛාව මත පිහිටි B ලක්ෂ්‍යයෙක ඛණ්ඩාංක ඉහත ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න.
t ඇසුරෙන් AB හි සහ BC හි බෑවුම් කවරේද?
BC ට AB ලම්බ නම්, එවිට

(i) B සඳහා පිහිටීම් දෙකක් තිබිය හැකි බව ද අනුරූප t හි අගයන් $\pm \dfrac{4\lambda}{1+\lambda^2}$ බවද

(ii) PBC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{25\lambda^3}{(1+\lambda^2)^2}$ බව ද පෙන්වන්න.

---

(20) (a, b) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන්නාවූ ද, $x-$ අක්ෂය සමඟ θ කෝණයකින් ආනතවූ ද සරල රේඛාව, පරාමිතිකව $x = a + t\cos\theta, y = b + t\sin\theta$ මගින් නිරූපණය කළ හැකි බව පෙන්වන්න.

OAB ත්‍රිකෝණයේ O ශීර්ෂය, මූල ලක්ෂ්‍යය මත ද, A ශීර්ෂය, පළමුවන පාදකයේ ද, පිහිටන අතර $OB = 2\,OA$ ද, OA හි සහ OB හි සමීකරණ පිළිවෙලින් $x - 2y = 0$ සහ $2x + y = 0$ ද වේ. $(5, 1)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා AB යන්නේ නම් AB සඳහා නිවේශන දෙකක් තිබිය හැකි බව පෙන්වන්න. එම එක් එක් නිවේශනය සඳහා A හි සහ B හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න. තිබිය හැකි OAB ත්‍රිකෝණ දෙකේ වර්ගඵලවල අනුපාතය සොයන්න.

---

(21) H යනු, AC ට BH ලම්බ වන පරිදි ද, AB ට CH ලම්බ වන පරිදි ද ABC තලයෙහි වූ ලක්ෂ්‍යයයි. ABC තලයෙහි වූ සෘජුකෝණාස්‍රාකාර කාටීසියානු අක්ෂ කුලකයකට අනුබද්ධවල $A \equiv (\alpha, \beta)$ වේ; මෙහි $|\alpha| \neq 1$, $\beta \neq 0$ සහ $\alpha^2 + \beta^2 \neq 1$ වේ. BH සහ CH රේඛාවල සමීකරණ පිළිවෙලින් $(\alpha - 1)\,x + \beta y + \alpha - 1 = 0$ සහ $(\alpha + 1)\,x + \beta y - (\alpha + 1) = 0$ වෙයි. B සහ C හි ඛණ්ඩාංක නිර්ණය කර AH සහ BC ලම්බ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයේ එක් එක් ශීර්ෂය හරහා, සම්මුඛ පාදයට සමාන්තර රේඛාවක් අඳිනු ලැබේ. මෙම රේඛා තුනෙන් $A'B'C'$ ත්‍රිකෝණය සෑදේ. H ලක්ෂ්‍යය, A', B' සහ C' ලක්ෂ්‍යවලින් සමදුරින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

---

(22) x හා y අක්ෂ මත පිළිවෙලින් a හා b අන්තඃඛණ්ඩ සාදනු ලබන සරල රේඛාවේ සමීකරණය ලබා ගන්න.
$\dfrac{x}{h} + \dfrac{y}{k} = 1$ මගින් දෙනු ලබන l, අචල සරල රේඛාවක් x හා y අක්ෂ පිළිවෙලින් A හා B

ලක්ෂ්‍යවල දී හමු වේ. l රේඛාවට ලම්බ l' නම් සරල රේඛාවක් x හා y අක්ෂ පිළිවෙලින් P හා Q ලක්ෂ්‍යවල දී හමු වේ. AQ හා BP සරල රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය, (h, k) ලක්ෂ්‍යය රහිත $x^2 + y^2 - hx - ky = 0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

---

(23) $y = mx + c$ සරල රේඛාව, සමාන්තර නොවන $u_1 \equiv y - m_1x - c_1 = 0$ සහ $u_2 \equiv y - m_2x - c_2 = 0$ සරල රේඛා දෙක පිළිවෙලින් A සහ B හිදී ඡේදනය කරයි. R යනු $AR = k\,RB$ වන සේ AB මත වූ ලක්ෂ්‍යයකි. $u_1 \equiv 0$ සහ $u_2 \equiv 0$ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යයට R යා කරන සරල රේඛාවේ සමීකරණය $u_1 + \dfrac{k\,(m - m_1)}{m - m_2}\,u_2 = 0$ බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක AB, BC, CA පැති පිළිවෙලින් $3x + 2y - 6 = 0,\ 2x + y - 2 = 0,$ $x + y - 3 = 0$ රේඛා ඔස්සේ පිහිටයි. AB මත R ලක්ෂ්‍යයක් සහ AC මත Q ලක්ෂ්‍යයක් $2\,AR = RB$ සහ $3\,AQ = 2\,QC$ වන පරිදි පිහිටා ඇත.

(i) A හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

(ii) BQ සහ CR රේඛාවල සමීකරණ ලියන්න.

(iii) D හි දී BQ සහ CR හමුවේ නම් සහ P යනු AD සහ BC හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය නම් $AP : PB$ අනුපාතය සොයන්න.

---

(24) $u_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ සහ $u_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ යනු දී ඇති සමාන්තර නොවන සරල රේඛා දෙකකි. λ හි සෑම අගයක් සඳහා ම $u_1 + \lambda u_2 = 0$ සරල රේඛාව අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වන්න.
ABC ත්‍රිකෝණයක සම්මුඛ පාදවලට B, C හරහා අඳිනු ලැබූ ලම්බවල සමීකරණ පිළිවෙලින් $x - 4y + 5 = 0$ සහ $2x - y + 3 = 0$ වේ. $x - A$ හි ඛණ්ඩාංක $(k, -k)$ ලෙස ගනු ලැබුවේ නම්, AB සහ AC රේඛාවල සමීකරණ ද B හි සහ C හි ඛණ්ඩාංක ද k ඇසුරෙන් සොයන්න.
k විචලනය වන විට, ABC ත්‍රිකෝණයේ කේන්ද්‍රකය $x + 5y - 4 = 0$ රේඛාව මත පිහිටන බව සාධනය කරන්න.

---

(25) u හා v යනු පිළිවෙලින් $A \equiv (5, 0)$ හා $B \equiv (-5, 0)$ ලක්ෂ්‍ය හරහා යන සමාන්තර රේඛා දෙකක් යැයි ගනිමු. $4x + 3y = 25$ රේඛාව P හිදී u ද Q හිදී v ද හමුවේ යැයි ගනිමු. PQ හි දිග ඒකක 5ක් නම්, u හා v සමාන්තර රේඛා යුගලය සඳහා අවස්ථා දෙකක් තිබිය හැකි බව පෙන්වන්න. ඉහත නිර්ණය කරන ලද රේඛා හතරේ ම සමීකරණ ලියා දක්වන්න. මෙම රේඛා හතර මගින් සාදනු ලබන සමාන්තරාස්‍රයේ විකර්ණවල සමීකරණ සොයන්න. තව ද ඉහත සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය ද සොයන්න.

---

(26) සමාන්තරාස්‍රයක පාද දෙකක් $y = x - 2$ සහ $4y = x + 4$ සමීකරණවලින් දී ඇත. සමාන්තරාස්‍රයේ විකර්ණ මූල ලක්ෂ්‍යයේ දී ඡේදනය වේ.

(i) සමාන්තරාස්‍රයේ ඉතිරි පාදවල සමීකරණ ද,

(ii) විකර්ණවල සමීකරණ ද ලබාගන්න.

තව ද, සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය ද සොයන්න.

---

(27) ABC ත්‍රිකෝණයක B හා C ශීර්ෂ පිළිවෙළින් $4x - 3y = 0$ රේඛාව මත හා $x-$ අක්ෂය මත පිහිටයි. BC පාදය $(2/3, 2/3)$ හරහා යන අතර එයට m බෑවුමක් ඇත.

(i) m ඇසුරෙන් B හා C හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

(ii) $OB = \left|\dfrac{10\,(m-1)}{3\,(3m-4)}\right|$ බවත්, $OC = \left|\dfrac{2\,(m-1)}{3m}\right|$ බවත් පෙන්වන්න;

මෙහි O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය වේ.

(iii) $ABOC$ රොම්බසයක් නම්, m ට තිබිය හැකි අගය දෙක හා A හි අනුරූප ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

---

(28) $px + qy + r = 0$ සරල රේඛාව අනුබද්ධයෙන් (x_1, y_1) ලක්ෂ්‍යයෙහි ප්‍රතිබිම්බයේ ඛණ්ඩාංක $(x_1 - p\lambda, y_1 - q\lambda)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි λ නිර්ණය කළ යුතු නියතයක් වෙයි. ඒ නයින්, $px + qy + r = 0$ සරල රේඛාව අනුබද්ධයෙන් $lx + my + n = 0$ රේඛාවේ ප්‍රතිබිම්බය සොයන්න.

$ABCD$ රොම්බසයෙහි AB පාදයේ සහ AC විකර්ණයේ සමීකරණ පිළිවෙළින් $3x - y + 6 = 0$ සහ $x - y + 8 = 0$ වෙයි. B හි ශීර්ෂයෙහි ඛණ්ඩාංක $(3, 15)$ වෙයි. A, C සහ D හි ඛණ්ඩාංක ප්‍රකාශිත ලෙස නොසොයා, රොම්බසයෙහි ඉතිරි පාද තුනේ සමීකරණ සොයන්න.

---

(29) ABC යනු $A \equiv (2, 4)$ ද, $y = x + 1$ රේඛාව මත B හා C ද, වන අයුරින් වූ ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. ABC හා ADE ත්‍රිකෝණවල වර්ගඵලය $9 : 4$ අනුපාතයට වන අයුරින් BC ට සමාන්තරව අඳින ලද l නම් රේඛාවක්, AB හා AC පිළිවෙළින් D හා E හි දී කපයි. G යනු A සිට l ට ඇඳි ලම්බයේ අඩිය ද, M යනු AB තුළ G හි දර්පණ ප්‍රතිබිම්බය ද යැයි ගනිමු.

(i) G හි ඛණ්ඩාංක හා l හි සමීකරණය සොයන්න.

(ii) $AM = AG$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින් හෝ වෙනත් ක්‍රමයකින් හෝ B ලක්ෂ්‍යය $y = x + 1$ රේඛාව මත චලනය වන විට M ලක්ෂ්‍යය, කේන්ද්‍රය A හා අරය $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ වූ වෘත්තයක් මත චලනය වන බව සාධනය කරන්න.

---

(30) (*a*) $y = m_1x + c_1$ හා $y = m_2x + c_2$ මඟින් දෙනු ලබන සරල රේඛා අතර කෝණ සමච්ඡේදක වන l_1 හි හා l_2 හි සමීකරණ ලබාගන්න. මෙහි $m_1 \neq m_2$ වේ.
ඒ නයින්, l_1 හා l_2 ලම්බ බව සත්‍යාපනය කරන්න.

(*b*) ABC යනු $x-$ අක්ෂයේ ධන දිශාව ඔස්සේ BC ආධාරකය චලනය වන පරිදි ද, $AB = AC$ ද, A ශීර්ෂය $x-$ අක්ෂයට ඉහළින් ද වූ ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. ABC ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 9 ක් ද, BC පාදයේ දිග ඒකක 6 ක් ද වේ. $B \equiv (b, 0)$ යැයි ද ගනිමු.

(i) AB සහ AC පාදවල සමීකරණ සොයන්න.

(ii) ඉහත (a) හි ලබාගත් කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ භාවිතයෙන් ABC ත්‍රිකෝණයේ B සහ C කෝණවල අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදකවල සමීකරණ සොයන්න.

ඒ නයින්, $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ හි අගය සොයන්න.

(iii) ABC ත්‍රිකෝණයේ කෝණවල අභ්‍යන්තර සමච්ඡේදක තුන එක් ලක්ෂ්‍යයකදී හමුවන බව සත්‍යාපනය කර, එම ලක්ෂ්‍යයේ පථය නිර්ණය කරන්න.

---

(31) (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යය හරහා යන $ax + by + c = 0$ සරල රේඛාවට ලම්භ සරල රේඛාව මත පිහිටි ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(x_0 + at; y_0 + bt)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි t යනු පරාමිතියකි.
ඒ නයින්, $ax + by + c = 0$ රේඛාව තුළ (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යයෙහි දර්පණ ප්‍රතිබිම්බයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

OAB ත්‍රිකෝණයෙහි OA සහ AB පාදවල ලම්භ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ පිළිවෙළින් $x\cos\theta + y\sin\theta = 1$ සහ $x - y = 1$ මෙහි $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ වන අතර, O යනු මූල ලක්ෂ්‍යය වේ.
OAB ත්‍රිකෝණයෙහි පාද තුනෙහි සමීකරණය සොයන්න.
තවද, OB පාදයෙහි ලම්භ සමච්ඡේදකයෙහි සමීකරණය සොයා, OAB ත්‍රිකෝණයෙහි පාදවල ලම්භ සමච්ඡේදක ඒක ලක්ෂ්‍යය වන බව සත්‍යාපනය කරන්න.

---

(32) (a) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ සහ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ සරල රේඛා අතර කෝණයේ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ $\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$ බව පෙන්වන්න.

(b) (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යන සරල රේඛාවක සමීකරණය $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = t$ ලෙස පරාමිතික ආකාරයෙන් දී ඇත. මෙහි $a^2 + b^2 = 1$ හා t පරාමිතියක් වේ. $|t|$ යනු (x_0, y_0) ලක්ෂ්‍යයේ සිට (x, y) ලක්ෂ්‍යයට රේඛාව දිගේ මනින ලද දිග බව පෙන්වන්න.

(c) $ABCD$ රොම්බසය පූර්ණ ලෙස පළමු පාදකය තුළ පිහිටයි. AB හා AD හි සමීකරණ පිළිවෙළින් $x - 2y + 5 = 0$ හා $2x - y + 1 = 0$ වේ. BAD කෝණය සුළු කෝණයක් වන අතර $AC = 2\sqrt{2}$ වේ. (a) හා (b) කොටස් උපයෝගී කරගනිමින් හෝ වෙනත් ආකාරයකින් හෝ, AC හි හා රොම්බසයේ අනෙක් පාද දෙකෙහි සමීකරණ සොයන්න. E යනු රොම්බසයේ විකර්ණවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය නම් DE හි දිග සොයා ඒ නයින් රොම්බසයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

---

(33) $lx + my + 1 = 0$ සරල රේඛාව සමඟ සමද්විපාද සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් සාදන ලෙස මූල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ එකිනෙකට ලම්බව යන සරල රේඛා දෙකෙහි සමීකරණය $(l - m)\,x + (l + m)\,y = 0$ හා $(l + m)\,x - (l - m)\,y = 0$ බව පෙන්වන්න.

---

(34) $ax + by + c = 0$ සරල රේඛාව මත $P(x_0, y_0)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි ප්‍රතිබිම්බය $(x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b)$ මගින්

දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda = -\dfrac{2(ax_0 + by_0 + c)}{(a^2 + b^2)}$ වේ.

ඒ නයින්, $ax + by + c = 0$ සරල රේඛාව මත $px + qy + r = 0$ සරල රේඛාවෙහි ප්‍රතිබිම්බය

$px + qy + r - \dfrac{2(ap + bq)}{(a^2 + b^2)}(ax + by + c) = 0$ බව පෙන්වන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. BAC හා ABC කෝණවල සමච්ඡේදකවල සමීකරණ පිළිවෙළින් $2x - y = 1$ හා $x + y = 5$ වේ. BC සරල රේඛාවේ සමීකරණය $y = mx + (1 - m)$ වේ; මෙහි $m \in \mathbb{R}$ වේ. AB හි සමීකරණය සොයා, m විචලනය වන විට එය අචල ලක්ෂ්‍යයක් ඔස්සේ යන බව පෙන්වන්න.

AC සරල රේඛාවත් ඉහත අචල ලක්ෂ්‍යය ඔස්සේ යයි නම්, m හි අගය සොයන්න.

---

(35) සමාන්තර නොවන $l_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ හා $l_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ යන සරල රේඛා අතර කෝණ සමච්ඡේදකවල සමීකරණ සොයන්න.

$2x - 11y - 10 = 0$ හා $10x + 5y - 2 = 0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා දෙක අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකය, $4x - 7y - 8 = 0$ හා $8x + y - 4 = 0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා දෙක අතර මහා කෝණයේ සමච්ඡේදකය ම බව පෙන්වන්න.

---

(36) N යනු (h, k) බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට $ax + by + c = 0$ සරල රේඛාවට අඳින ලද ලම්බයේ අඩිය යැයි ගනිමු. N හි ඛණ්ඩාංක $(h + at, k + bt)$ බව සාධනය කරන්න;

මෙහි $t = -\dfrac{ah + bk + c}{a^2 + b^2}$ වෙයි.

$ABCD$ යනු රොම්බසයකි. AB හි සමීකරණය $4x - 3y + 15 = 0$ ද, BD විකර්ණයේ සමීකරණය $2x + y - 5 = 0$ ද, $A = (-3, 1)$ ද වෙයි. AC විකර්ණයේ සමීකරණය හා රොම්බසයේ අනෙක් පාද තුනෙහි සමීකරණ සොයන්න.

---

(37) l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $2x + y = 5$ හා $x + 2y = 4$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු. l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණය $\tan^{-1}(3/4)$ බව පෙන්වා, මෙම කෝණයේ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය සොයන්න.

✦✦✦

Manoj Solangaarachchi
_(B. Sc.)_